הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 1מ – 104018

בחן אמצע, חורף - 12.12.21

משך הבחן שעתיים.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול, ולא בעפרון או בעט בצבע אדום.
יש לרשום את התשובות בדפים אלו. תשובות בדפי טיוטה לא יתקבלו.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 4 שאלות בחירה מרובה ושאלה אחת עם 4 סעיפים של נכון או לא נכון. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה. משקל כל אחת מהשאלות $1-4$ בחלק זה הוא 9 נקודות.

תזכורת: כאשר אומרים כי גבול **קיים**, הכוונה לקיים וסופי.

1. נתונה $f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) הפונקציה חח"ע בקטע $(-\infty,\infty)$.***

(ב) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

(ג) $f(x)$ פונקציה איזוגית בקטע $(-\infty,\infty)$.

(ד) קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו קיים $x<0$ עבורו $f(x)>\frac{1}{n}$.

2. תהיינה $f(x),g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $f(x),g(x)$ על, אז $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על.***

(ב) אם $f(x)$ חח"ע וגם $g(x)$ על, אז $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח"ע ועל.

(ג) אם $f(x)$ על וגם $g(x)$ חח"ע, אז $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח"ע ועל.

(ד) אם $f(x)$ חח"ע וגם $g(x)$ מונוטונית עולה ממש, אז $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה ממש.

3. אחת מהאפשרויות הבאות גוררת ש־ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ (a,L סופיים). אפשרות זו היא

(א) לכל $\delta>0$ מתקיים שכאשר $0<|x-a|<\delta^2$ אז $|f(x)-L|<2\delta$.***

(ב) קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$, כאשר $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\varepsilon$.

(ג) לכל $\delta>0$ מתקיים שכאשר $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-L|<1+\delta$.

(ד) לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שכאשר $0<|x-a|<\varepsilon$ אז $|f(x)-L|<\delta$.

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $\lim\limits_{x\to 0}\sin\big(f(x)\big)=0$ אז $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

(ב) אם $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\big)^4$ קיים, אז $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ קיים.***

(ג) אם $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big)^x=\infty$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(ד) אם $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\big(f(x)\big)$ קיים, אז $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ קיים.

5. בשאלה זו 4 סעיפים שמשקל כל אחד מהם 3 נקודות. סמנו בכל סעיף אם מה שרשום נכון או לא נכון.

(א) אם לכל x מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ וגם $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L = \lim_{x\to 0^+} h(x)$, אז $\lim_{x\to 0} g(x)$ קיים ושווה ל־L.

נכון **לא נכון**

(ב) אם $f(x) \leq g(x)$ לכל x, וגם $f(x)$ עולה, וגם $\lim_{x\to 0} g(x)$ קיים, אז $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים.

נכון **לא נכון**

(ג) עבור קבוצות לא ריקות וחסומות מלמטה $A, B \subset \mathbb{R}$, אם $\inf A \leq \inf B$ אז קיים $a_0 \in A$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים $a_0 < b$.

נכון **לא נכון**

(ד) עבור קבוצות לא ריקות וחסומות $A, B \subset \mathbb{R}$, אם $\inf A < \inf B \leq \sup B < \sup A$ אז $A \subset B$.

נכון **לא נכון**

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.
בשאלות הפתוחות, אין בהכרח קשר בין הסעיפים. עם זאת, אפשר להשתמש בסעיף קודם אפילו אם לא הוכחתם אותו.

6. (25 נקודות)

(א) (5 נקודות)
הגדירו $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x-4}=-1$.

(ב) (20 נקודות)
הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x-4}=-1$.
פתרון: יהי $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{2x-1}{3x-4}-(-1)\right|=\left|\frac{2x-1+3x-4}{3x-4}\right|=\left|\frac{5(x-1)}{3x-4}\right|=\frac{5}{|3x-4|}\cdot|x-1|.$$

כאשר $0<|x-1|<\delta$, אז $|x-1|<\delta$ ולכן

$$1-\delta<x<1+\delta$$

ולכן

$$3-3\delta<3x<3+3\delta$$

ולכן

$$-1-3\delta<3x-4<-1+3\delta.$$

לכן, אם $\delta\le\frac{1}{6}$ אז

$$-\frac{3}{2}=-1-3\cdot\frac{1}{6}\le-1-3\delta<3x-4<-1+3\delta\le-1+3\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$$

ונקבל כי

$$\frac{1}{2}\le|3x-4|=-(3x-4)\le\frac{3}{2}$$

שנותן כי

$$\frac{2}{3}\le\frac{1}{|3x-4|}\le 2.$$

לכן

$$\left|\frac{2x-1}{3x-4}-(-1)\right|=\frac{5}{|3x-4|}\cdot|x-1|\le_{\delta\le\frac{1}{6}}10|x-1|<10\delta\le_{\delta\le\frac{\varepsilon}{10}}\varepsilon$$

ולכן, עבור $\delta=\min\{\frac{1}{6},\frac{\varepsilon}{10}\}$, מתקיים כי $0<\delta<\frac{1}{6},\frac{\varepsilon}{10}$, ולכן

$$\left|\frac{2x-1}{3x-4}-(-1)\right|<\varepsilon$$

7. (27 נקודות)

(א) (9 נקודות)
חשבו

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\cdot \sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{\tan^2(3x)}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\cdot \sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{\tan^2(3x)} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \frac{\sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot 2x^{\frac{3}{2}}\cdot \frac{(3x)^2}{\left(\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\right)^2}\cdot \frac{1}{(3x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{9x^2}\cdot \frac{\sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot \frac{(3x)^2}{\sin^2(3x)}\cdot \cos^2(3x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{9}\cdot \frac{\sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot \left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^2\cdot \cos(3x)\cos(3x) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 1\cdot 1^2\cdot \cos 0\cdot \cos 0 = \frac{2}{9}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בגבול המיוחד הראשון פעמיים עבור

$$x>0,\ 0\neq 2x^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \implies \frac{\sin\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{2x^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

$$x>0,\ 0\neq 3x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \implies \frac{\sin(3x)}{3x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1,$$

ואז, חשבון גבולות נותן כי

$$\frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{1}{\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{1} = 1,$$

ובגבול של הרכבה עבור $\cos(3x)$.

(ב) (9 נקודות) חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{2x^4+6x^6}}{\sqrt[6]{3x^6+x^7}}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{2x^4+6x^6}}{\sqrt[6]{3x^6+x^7}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4(2+6x^2)}}{\sqrt[6]{x^6(3+x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt[4]{2+6x^2}}{|x|\sqrt[6]{3+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{2+6x^2}}{\sqrt[6]{3+x}}=\frac{\sqrt[4]{2+0}}{\sqrt[6]{3+0}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{3}}$$

(ג) (9 נקודות) נתון כי $f(x), g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נתון בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה, $g(x)$ חסומה, וכי $f(x) \le g(x) \le f(x+1)$ לכל x.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ קיים.

פתרון: כיוון ש־ $g(x)$ חסומה אז קיים $0 \le M$ כך שלכל x מתקיים $|g(x)| \le M$, ובפרט $g(x) \le M$.
לכן, לכל x מתקיים כי $f(x) \le g(x) \le M$, ולכן $f(x)$ חסומה מלמעלה, ועולה, ולכן הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים (סופי), ונסמנו ע"י L.
מגבול של הרכבה נובע כי $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)$.
לכן, כיוון ש־

$$L \xleftarrow[x\to\infty]{} f(x) \le g(x) \le f(x+1) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$$

אז, לפי סנדביץ, נובע כי $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$, כלומר הגבול הנ"ל קיים.

כיוון ש־ f עולה, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. כיוון ש־ f עולה, הגבול (במובן הרחב) אינו $-\infty$. אם הגבול (במובן הרחב) הוא ∞, אז כיוון ש־ $f(x) \le g(x)$ לכל x, אז לפי פיצה $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, בסתירה לזה ש־ g חסומה. לכן $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים (סופי), ונסמנו ע"י L. מפה אפשר להמשיך כמו בפתרון הראשון.